שישה מושגים מתמטיים במקרא ובכתבי חז״ל

אילה רביב ומוניק חדד

תקציר

מאמר זה מתאר שישה מושגים מתמטיים המופיעים במקרא ובספרות חז״ל. המושגים שיוצגו הם: ממוצע חשבוני, יחס ופרופורציה, פלינדרום, חזקות ולוגריתמים, עצרת ואינדוקציה. המושגים יוצגו תוך תיאורם באופן מתמטי וכפי שהם מופיעים במקרא ובמקורות חז״ל.

נבחרו מושגים מתמטיים המופיעים במקורות היהודיים ושנלמדים בתוכנית הלימודים הפורמלית בחטיבת הביניים ובתיכון. הבאת חומר לימודי מתמטי מתוך מקורות המקרא ומחז״ל מהווה דוגמה ללמידה רב־תחומית המתקבלת כיום בברכה במערכת החינוך. הוראה על פי המקורות היהודיים למושגים מתמטיים תעשיר את למידת המתמטיקה, כפי שהוראה של ההיסטוריה ושל הפילוסופיה של המדע מעשירה את הלמידה המדעית. המושגים המוסברים כאן, מופיעים במקורות היהודיים כמשמעם בימינו או במשמעות דומה. לעיתים נמצא שימוש בהם כמושגים מחשבתיים־פילוסופיים, שניתן לדון בהם במערך הנהגות האדם והליכותיו, גם מחוץ למישור המתמטי ולמישור החישובי.

מאמר זה יוצא בקריאה למורים ולמחנכים, הן אלה העוסקים במתמטיקה והן אלה המלמדים יהדות, להתייחס אל התיאוריה והפרקטיקה של הוראת המתמטיקה מנקודת מבט יהודית: להציג את יחסה האוהד של היהדות למתמטיקה מחד, ואת בקיאותם המופלגת של חכמי ישראל במתמטיקה ומדעים מאידך.

מילות מפתח: מושגים מתמטיים, ממוצע חשבוני, יחס, פרופורציה, פלינדרום, חזקות ולוגריתמים, עצרת, אינדוקציה

מבוא

מאמר זה נכתב מתוך הצורך להוסיף נדבך חשוב לדרך הוראת המתמטיקה בחינוך התורני, כך שדרכו תיראה המתמטיקה בעין יהודית. מקובל כיום לדבר על ׳חינוך מתמטי׳, ובמאמר זה נציג שישה מושגים שמהם ניתן להדגים דרכים להעשרת החינוך היהודי באמצעות המתמטיקה ולחיזוק החינוך המתמטי בעזרת המקורות של עמנו. רצוננו להציג בפני המורים והתלמידים את יחסה האוהד של היהדות למתמטיקה מחד, ואת בקיאותם המופלגת של חכמי ישראל בתחום זה מאידך.

לציטוט (מדעי הרוח) - א׳ רביב ומ׳ חדד, ׳שישה מושגים מתמטיים במקרא ובכתבי חז״ל׳, חמדעת, יב (תש״ף).

פרטי המחברות:

ד״ר אילה רביב
מכללת חמדת הדרום
דוא״ל: ayalaraviv1@gmail.com

מוניק חדד
מכללת חמדת הדרום
דוא״ל: monikhadad10@walla.co.il

ISSN: 0793-3994

הצגה וניתוח של מושגים מתמטיים שנדלו ממקורות מקראיים ומדברי חז״ל, התפרסמו במאמרים ובספרים שונים שהופיעו בעשרות השנים האחרונות. החיבורים רבים, וכמובן שלא נוכל למנות כאן אף לא את מקצתם. החיבורים נכתבו בידי מדענים חוקרי יהדות, חלקם מתוך הצהרה ברורה על ייעודם לתרום להוראת המתמטיקה במסגרות העוסקות בחינוך היהודי. כך לדוגמה, ספרה של רחל רוזנבוים, ׳חכמת התשבורת: המתמטיקה באספקלריא יהודית׳, המתאר את בקיאותם של חכמי ישראל במתמטיקה לענפיה השונים ואת חיבוריהם בנושאים מתמטיים.[1]

מאמרים רבים הופיעו בשנים האחרונות בכתבי עת העוסקים בענייני תורה ומדע, ועל פי רוב, כל מאמר כזה עוסק במושג או ברעיון אחד. נזכיר כאן את מאמרו של שמעון בולג, שמתאר כיצד הוכיח ר׳ אביעד שר שלום בזיליה לפני כ־260 שנה את דרך החישוב של הצלע הארוכה במשולש ישר זווית.[2] סלוצקין כתב על דיוק אריתמטי במשנה בכתב העת ׳הגיון׳, אשר עוסק במחקרים בנוגע לדרכי החשיבה של חז״ל.[3] הערך המספרי של פאי בספרות התלמודית והפרשנית נידון על ידי בולג באותו כתב עת.[4] כתב עת נוסף שעוסק רבות במחקרים בתחום התורה והמדע, הוא ׳בדד – בכל דרכיך דעהו׳, בהוצאת אוניברסיטת בר אילן. לדוגמה, ניתן למצוא שם דיון של אורי צור ויהודה אשכנזי בדבר שיטות מדידה המבוססות על שיטתו של רבן גמליאל בבבלי, עירובין מג ע״ב לצורך מדידת מרחק במישור ולשם מדידת עומקו של גיא בעזרת שפופרת – שיטה שאינה ברורה דייה במקורות.[5]

טור גאומטרי אינסופי החבוי במשנת הראב״ד, מוצג במאמרם של עמוס ונתנאל אלטשולר, המתייחס למאמרים שפרסם פרופ׳ ישראל אומן על השיטות השונות לחלוקות עיזבונו של אדם שנפטר, ויש או אין בעיזבונו די על מנת לשלם את הכתובות לכל נשותיו, יהא מספרן אשר יהא.[6] מאמרים רבים מספור דנים בחישובים מתמטיים המסייעים בקביעת הזמנים השונים בלוח השנה העברי, ומביניהם נזכיר את מאמרו של רונן קציר, שמציע כלים מתמטיים לקביעת התאריך על פני כדור הארץ על פי שיטות שונות בהלכה.[7] חישובים מתמטיים מתוחכמים נידונים על ידי רון עדין ויובל רויכמן מנקודות מבט אלגברית, קומבינטורית, גאומטרית, הסתברותית, וכן מנקודת המבט של תורת הסיבוכיות במדעי המחשב, כדי לתאר אלגוריתמים של צירופי עדים שהוצעו על ידי הרמב״ן ובעל ׳נימוקי יוסף׳.[8] באותו גיליון של בדד מופיע גם דיון של ערן רביב בסדרה הנדסית יורדת המופיעה בספר במדבר והמתורגמת לנוסחה מתמטית.[9] והדוגמאות עוד רבות מספור.

בחרנו להציג במאמר זה שישה מושגים מתמטיים שניתן למצוא במקורות היהדות ושנלמדים במסגרת תוכנית הלימודים הפורמלית. חלק ממושגים אלה מופיעים במקורות היהדות כמשמעם בימינו, וחלק מהם מופיעים במשמעות דומה. הבאת חומר לימודי מתמטי מתוך מקורות היהדות מהווה דוגמה ללמידה רב־תחומית המתקבלת

---

[1] ר׳ רוזנבוים, חכמת התשבורת: המתמטיקה באספקלריה יהודית, ירושלים תשס״ג.

[2] ש׳ בולג, ׳הסבר הנדסי של ר׳ אביעד שר שלום בזיליה מכת״י׳, המעין, מה, ד (תשס״ה), עמ׳ 10–32.

[3] ד״י סלוצקין, ׳על דיוק אריתמטי במשנה׳, הגיון, ב (תשנ״ג), עמ׳ 72–75.

[4] ש׳ בולג, ׳הערות לסוגיית הערך המספרי של פאי בספרות התלמודית והפרשנית׳, הגיון, ג (תשנ״ה), עמ׳ 92–102.

[5] א׳ צור וי׳ אשכנזי, ׳שפופרת דרבן גמליאל ועומקו של גיא – גאודסיה תלמודית׳, בדד, 19 (תשס״ח), עמ׳ 5–25.

[6] ע׳ אלטשולר ונ׳ אלטשולר, ׳טור גיאומטרי אינסופי חבוי במשנת הראב״ד׳, בדד, 22 (תש״ע), עמ׳ 19–30.

[7] ק׳ רונן, ׳תיאור מתמטי של סוגיית קו התאריך בהלכה׳, בדד, 30 (תשע״ה), עמ׳ 29–40.

[8] ר׳ עדין, וי׳ רויכמן, ׳צירוף עדים – היבטים מתמטיים׳, בדד, 30 (תשע״ה), עמ׳ 7–20.

[9] ע׳ רביב, ׳תוספת חומש למכחש – סדרה הנדסית יורדת בתורה׳, בדד, 30 (תשע״ה), עמ׳ 155–156.

כיום בברכה במערכת החינוך. הכרת המקורות היהודיים תאפשר להציג נקודת מבט לא שגרתית בהוראת התחומים המתמטיים.

טבעי הדבר, שכל מורה מבקש להגביר את המוטיבציה ללימוד המקצוע שהוא עוסק בו ומחפש דרכים לעורר את רצון הלמידה אצל התלמידים, שהרי גישה חיובית למקצוע היא תנאי בסיסי להצלחה בו. אנו מאמינות שהשימוש בלשון העברית העתיקה יגוון את תהליך הלמידה ויעודד את הצד האינטואיטיבי של החשיבה מעבר לחשיבה פורמלית. הצגת הפתרון של בעיות הלכתיות ופסיקת ההלכה תהפוך את הלמידה למשמעותית, בכך שהיא תתאר מצבים בעולם המציאותי. למידה של המקורות היהודיים למושגים מתמטיים תעשיר את למידת המתמטיקה, כפי שלמידה של ההיסטוריה ושל הפילוסופיה של המדע מעשירה את הלמידה המדעית.

גדולי ישראל עודדו את הלימוד של מקצועות מדעיים כדי שישמשו עזר ללימוד התורה ולידיעתה, והאריכו במיוחד בחשיבות לימוד נושא החשבון, הן במה ששייך להבנת התורה והן בחיי היומיום. כתב בעל 'צפנת פענח' בהקדמתו: 'מלאכת החשבון הינו כלי חפץ לכל אדם אשר על פני האדמה, בכל שִׂיגו ועניניו במספר ימי חייו, בה יחשב עני תוצאות גרותיו (מזונו הלעוס), והעשיר תבואות כסף שקליו, בה יקנה הדל לחמו וכתנתו, ואיש הון מגדיו ואדרתו. היא תגיד לשכיר את שכרו ולסוחר את מסחרו...'.[10] ידועה אמרתו של הגר"א לבאי ביתו, שמי שחסרה לו יד אחת בחוכמות העולם, חסרות לו עשר ידות בחוכמת התורה. נמצא אפוא כי לימוד שאר החוכמות אינו רק הכרח אלא ערך בעל חשיבות בפני עצמו. התפתחות המדע והחוכמה האנושית מסייעת להתגלות התורה בכל רבדיה. על פי התלמוד, כל בן תורה צריך להתייחס ללימודי המדע באופן חיובי,[11] , וחכמים אף תיקנו ברכה על הרואה חכם בחוכמות העולם: 'ברוך... שנתן מחוכמתו לבשר ודם'.[12]

במאמר זה נתאר את ההופעה של שישה מושגים מתמטיים במקורות יהודיים: ממוצע חשבוני, יחס ופרופורציה, פלינדרום, חזקות ולוגריתמים, עצרת וצירופים ואינדוקציה.

ממוצע חשבוני

במילון אבן שושן נוכל למצוא כמה משמעויות למונח 'ממוצע': ממוצע אריתמטי (חשבוני) – סכום מספרים המחולק במספרים. לדוגמה, הממוצע האריתמטי של המספרים 7, 13, ו־25 הוא: $15 = 3 : (7+13+25)$; ממוצע גאומטרי (הנדסי) – מכפלת מספרים שהוצא ממנה שורש שמעריכו שווה למספר הגורמים שבמכפלה. לדוגמה: הממוצע הגאומטרי של המספרים 2 ו־8 הוא: 4.

$$\sqrt{2\cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

הממוצע החשבוני הוא מדד אמצע שימושי ביותר בסטטיסטיקה, לשם הצגת נתונים וניתוחם. ממוצע חשבוני הוא הגודל שהיה לכל מספר, אילו כל המספרים בסדרת מספרים היו הופכים להיות שווים זה לזה וסכומם היה שווה לסכום הסדרה המקורית.

הממוצע החשבוני במשמעותו המתמטית במקורות

---

[10] ר' יוסף שליפירז, צפנת פענח, ווארשא תרכ"א, עמ' 1.

[11] בבלי, שבת עה ע"א.

[12] בבלי, ברכות נח ע"א.

המידה הממוצעת – במשמעות של ערך הנמצא בין שני קצוות. הרמב"ם כותב: 'הדרך הישרה היא מידה בינונית שבכל דעה ודעה... והיא הדעה שהיא רחוקה משתי הקצוות ריחוק שווה... לפיכך ציוו חכמים הראשונים שיהא אדם שם דעותיו תמיד... ומכוון אותם בדרך האמצעית...'[13] – מה שמכונה אצלנו 'שביל הזהב'.

דיון מעניין תוך שימוש בממוצע חשבוני, ניתן למצוא ברמב"ם בהלכות ירושה.[14] הרמב"ם מתייחס למקרה הבא: דרך העולם היא שהאב המשיא את בתו, נותן לה רכוש ו/או כסף. ההערכה היא שבדרך כלל מדובר ב־10% מרכושו. אולם אם האב נפטר ויש לו בנות שעדיין לא נישאו, מה יהיה עליהן בהגיען לפרקן?[15] הרמב"ם כותב: 'הניח בנות רבות, כל שתבוא להינשא נותנין לה עישור הנכסים, ושלאחריה עישור מה ששיירה ראשונה, ושלאחריה עישור מה ששיירה שנייה וכו'. (עיקרון של סדרה הנדסית) ואם באו כולן להינשא כאחת, ראשונה נוטלת עישור, והשנייה עישור מה ששיירה ראשונה, והשלישית עישור מה ששיירה שנייה, וכן אפילו הן עשר וחוזרות וחולקות כל העישורים בשווה ושאר הנכסים לאחים'. כלומר, כאשר כל הבנות, או חלקן, רוצות להינשא באותו זמן, הן נוטלות בתחילה כל אחת ערך שונה – כפי שהיו נוטלות לו כל אחת מהן הייתה נישאת בזמן שונה, אך לאחר מכן הן יוצרות סכום כולל המורכב מהחלקים השונים, וחוזרות ומחלקות אותו ביניהן שווה בשווה. כך כל אחת מהן מקבלת סכום כסף שהוא הממוצע של סכומי הכסף שכל אחת נטלה בתחילה. היופי בפתרון הזה הוא שהבנות שנישאות בו־זמנית מקבלות מענק שווה, אך האחים שמתחלקים בנותר, מקבלים את היתרה כאילו הבנות נישאו בזו אחר זו, ובכך הם אינם מפסידים מהחלוקה השווה של הנדוניה שקיבלו הבנות.

שימוש במושג ממוצע בגאומטריה: משפט – 'כל נקודה הנמצאת על חוצה הזווית, נמצאת במרחקים שווים משוקי הזווית'. ההגדרה שבה נוקט הרמב"ם בעניין 'שביל הזהב'[10]: '...שהיא רחוקה משתי הקצוות ריחוק שווה...', יכולה להיות הרחבה והשלמה רעיונית ומוסרית לטיפול המתמטי בחישובי אמצע קטע ובמקום הגאומטרי שאותו מייצג חוצה הזווית.

חישוב מרכז המעגל: הגדרה - המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה מסוימת (= המרכז), נקרא מעגל.

אכילת בני החבורה: הגמרא מתארת שותפות בהוצאות הסעודה של מספר אנשים.[16] רב פפא ורב הונא עשו שותפות בפת. רב הונא אוכל פרוסה אחת, ורב פפא ארבע פרוסות. מאחר שרב הונא כנראה לא היה מרוצה משותפות זאת, שבה הוא נאלץ לכסות חלק מהוצאות הארוחה של חברו, מספרת הגמרא כי לאחר מכן הלך רב הונא ועשה שותפות עם רבינא. לרוע מזלו של רב הונא, התברר לו כי עד שהוא עצמו אכל פרוסה אחת, אכל רבינא שמונה פרוסות. הגמרא אומרת כי תגובתו של רב הונא הייתה: 'עדיף לי מאה פפא ולא רבינא אחד'.

בראייה שטחית נראית תגובה זאת כביטוי זעם גרידא, אך בחישוב פשוט, נראה כי רב הונא אמר כאן אמירה מתמטית. בשותפות של רב הונא האוכל פרוסה אחת, עם רבינא האוכל שמונה פרוסות, יש לנו שני שותפים האוכלים בסך הכול תשע פרוסות. כל אחד מהם משלם, אם כן, עבור 4.5 פרוסות. מאחר שרב הונא אכל רק פרוסה אחת, נמצא שהוא שילם עבור 3.5 פרוסות שלא אכל. לעומת זאת, בשותפות של רב הונא

---

[13] משנה תורה, הלכות דעות, א, ד.
[14] המקור לדברים מופיע בבבלי, כתובות סח ע"א: 'ראשונה נוטלת עישור נכסים, שניה במה ששיירה, ושלישית במה ששיירה, וחוזרות וחולקות בשווה'.
[15] משנה תורה, הלכות אישות, כ, ד.
[16] בבלי, פסחים פט ע"ב.

האוכל פרוסה אחת, עם 100 רב פפא שכל אחד מהם אוכל ארבע פרוסות, יש לנו 101 שותפים האוכלים בסך הכול ארבע מאות ואחת פרוסות. כל אחד מהם משלם עבור 401/101 = 3.97 פרוסות. מאחר שרב הונא אכל רק פרוסה אחת, נמצא שהוא שילם עבור 2.97 פרוסות שלא אכל, ואם כן הפסדו במקרה זה קטן יותר: 2.97 > 3.5.

על פי ממוצע משוקלל:[17] בשותפות בין רב הונא לבין 100 רב פפא, תהיה החלוקה על פי טבלה מס׳ 1:

טבלה מס׳ 1. החלוקה לפי שותפות בין רב הונא לבין 100 רב פפא

	$x_i f_i$	f_i	x_i
רב הונא	1	1	1
100 רב פפא	400	100	4
סה״כ	401	101	

$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i}$ $\qquad \bar{x} = \frac{401}{101} \sim 3.97$

בשותפות בין רב הונא לבין רבינא, תהיה החלוקה לפי טבלה מס׳ 2:

טבלה מס׳ 2. החלוקה לפי השותפות בין רב הונא לבין רבינא

	$x_i f_i$	f_i	x_i
רב הונא	1	1	1
רבינא	8	1	8
סה״כ	9	2	

$\bar{x} = \frac{9}{2} = 4.5 \qquad 4.5 - 1 = 3.5$

יחס ופרופורציה

המושג ׳יחס׳ מייצג השוואה בין שתי כמויות, ובאופן חשבוני הוא מבוטא כמנה של חלוקתם זה בזה. דוגמה: אם היחס בין תפוחים לבננות בסל הוא 1/2, זה אומר שעל כל 1 תפוחים בסל יש 2 בננות בסל. מכאן שאם יש 3 תפוחים בסל, ועל כל תפוח יש 2 בננות, הרי שיש בסל 6 בננות.

יחס ישר – קשר מקביל בין שני גדלים, כך שבאותה מידה שיגדל הגודל האחד, יגדל גם השני. לדוגמה, קיים יחס ישר בין מספר הפועלים ובין הסכום הכולל של שכרם: ככל שיגדל מספר הפועלים, כן יגדל הסכום הכולל של שכרם.

יחס הפוך – קשר של היפוך בין שני גדלים. היינו, באותה מידה שיגדל הגודל האחד, כך יקטן השני. לדוגמה, קיים יחס הפוך בין מספר השותפים ובין חלקו של כל שותף בחלוקת הרווחים: ככל שיגדל מספר השותפים, כן תקטן מנתו של כל שותף.

[17] W. M. Feldman, *Rabinical Mathematics and Astronomy*, New York 1978, p. 20. מובא אצל רוזנבוים (לעיל הערה 1), עמ׳ 114.

היחס – במשמעותו המתמטית במקורות

הביטוי המביע מושג זה במקרא הוא 'מתכונת'.

כמות הלבנים שבני ישראל צריכים להכין, היא מכפלה של הכמות שכל אחד מהם מכין: 'וְאֶת מַתְכֹּנֶת הַלְּבֵנִים אֲשֶׁר הֵם עֹשִׂים תְּמוֹל שִׁלְשֹׁם תָּשִׂימוּ עֲלֵיהֶם לֹא תִגְרְעוּ מִמֶּנּוּ'.[18]

בציווי הכנת שמן משחת הקודש, העשוי מרקחת המכילה מספר מרכיבים ביחס מסוים, נאמר: 'עַל-בְּשַׂר אָדָם לֹא יִיסָךְ וּבְמַתְכֻּנְתּוֹ לֹא תַעֲשׂוּ כָּמֹהוּ קֹדֶשׁ הוּא קֹדֶשׁ יִהְיֶה לָכֶם'.[19]

בציווי הכנת הקטורת, שאף היא הייתה עשויה מרקחת של מרכיבים שונים ביחס מתאים, נאמר: 'וְהַקְּטֹרֶת אֲשֶׁר תַּעֲשֶׂה בְּמַתְכֻּנְתָּהּ לֹא תַעֲשׂוּ לָכֶם קֹדֶשׁ תִּהְיֶה לְךָ לַה''.[20]
קיימת הבחנה בין מידות שונות של נוזל ומוצק וביחס הפרופורציוני שביניהן: 'הָאֵיפָה וְהַבַּת, תֹּכֶן אֶחָד יִהְיֶה לָשֵׂאת, מַעְשַׂר הַחֹמֶר הַבָּת; וַעֲשִׂירִת הַחֹמֶר הָאֵיפָה, אֶל הַחֹמֶר יִהְיֶה מַתְכֻּנְתּוֹ'.[21]

הרמב"ם מונה בספר המצוות[22] מצוות לא תעשה המתייחסת לאיסור הכנת הקטורת ולשימוש בה. הוא מסביר את משמעות המושג 'בְּמַתְכֻּנְתָּהּ' כך: 'כלומר שיהיה מן הסממנין ההם ועל יחס המשקולות ההם, ובלשוננו: באותו יחס.

נביא שלוש סוגיות מהמקורות בעניין היחס.

חישוב גובהו של דקל
הגמרא מציגה את השאלה הבאה: 'הרוצה לידע כמה גובהו של דקל מודד קומתו וצילו וצל קומתו וידע כמה גובה של דקל...'.[23]
ניסוח הבעיה והוכחתה בשפה מתמטית בת זמננו:

לצורך מדידת עצמים גבוהים, שאין אפשרות למדוד את גובהם באמצעות כלי מדידה, מכיוון שלא ניתן להגיע עד ראשם, מוצעת שיטת חישוב על פי פרופורציה – שוויון בין יחסים.

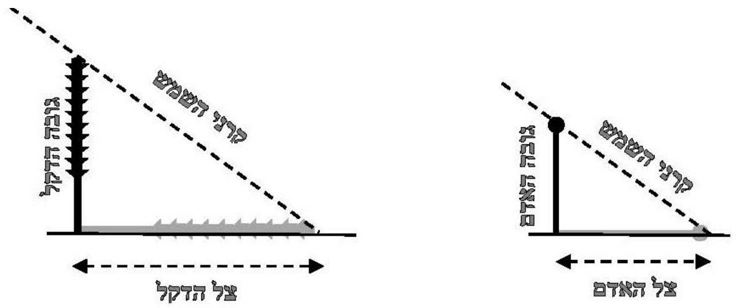
$$\frac{\text{צל הדקל}}{\text{גובה הדקל}} = \frac{\text{צל האדם}}{\text{גובה האדם}}$$

אם רוצים לדעת את קומתו של דקל מבלי למדוד אותו, מודדים את גובהו של האדם ואת אורך צילו, וכן את אורך צילו של הדקל. היחס בין גובהו של האדם לבין אורך צילו יהיה היחס בין גובה הדקל לבין אורך צילו. ואף על פי שהיחס בין גובה העצם לבין אורך הצל משתנה לפי שעות היום, באותו זמן שווה היחס בכל הדברים.

מאחר שקרני השמש הפוגעות בראש הדקל ובראש האדם יוצרות אותה זווית, הרי שנוצרים שני משולשים הדומים ביחס זוויותיהם לצלעותיהם. ומאחר שידוע לנו גובהו של האדם וצילו, ממילא כך גם יהיה היחס בין גובהו של הדקל לצילו, ונוכל לחשב את גובהו.

[18] שמ' ה 8.
[19] שמ' ל 32.
[20] שמ' ל 37.
[21] יח' מה 11.
[22] ספר המצוות, מצוות לא תעשה, מצווה פה.
[23] הבבלי, עירובין מג ע"ב, מביא את דברי הברייתא.

איור מס׳ 1. היחס בין גובה האובייקט לצילו בזמן מסוים במשך היום



היחס בין הגובה של כל דבר לאורך צילו משתנה לפי גובה מיקום השמש ברקיע, וככל שהשמש נמוכה יותר, כך אורך הצל מתארך יותר. אולם מכל מקום, בכל רגע של היום, היחס בין אורך הדבר לצילו שווה. לכן, חשוב לבצע את המדידות הללו באותה שעה, כך שהיחסים יהיו שווים.

בעניין חשבון שבח מעשר שני - במשנה במסכת מעשר שני מתוארת בעיה שנושאה הוא: כיצד יש לחלק רווחים כספיים שנתקבלו כתוצאה מהשבחתה של סחורה מסוימת. וכך לשון המשנה:

> *מעשר שני ניתן לאכילה, לשתייה ולסיכה, לאכול דבר שדרכו לאכול, ולסוך דבר שדרכו לסוך... נפל לתוכו דבש ותבלין והשביחו, השבח לפי החשבון׳.*[24]

נפל לתוך יין של מעשר שני, כשהוא חוץ לירושלים, דבש ותבלין והשביח, חולקין את השבח לפי חשבון, כגון: אם היין שווה שני סלעים, ודבש ותבלין שווין סלע, והשביחו ועמדו על ארבעה סלעים, פודה את היין בשני סלעים ושני שלישי סלע׳.[25]

ניסוח הבעיה והוכחתה בשפה מתמטית בת זמננו:

מחלקים את השבח (שיעור ההטבה) באופן יחסי לשווי היין, הדבש והתבלין.

X = שווי היין $\quad$ y = שווי הדבש והתבלין $\quad$ z = שיעור מלא לאחר ההטבה

היחס בין היין לבין התוספות: $\frac{x}{x+y}$

ערך פדיון היין לאחר ההטבה: $\frac{xz}{x+y}$

דוגמה: היין של מעשר שני שווה לשני סלעים. הדבש והתבלין שנפלו לתוכו והשביחוהו שווים ביחד סלע אחד. לאחר ההשבחה, שוויו של היין הוא ארבעה סלעים. מכאן, שהשבח הוא סלע אחד, לאחר ניכוי היין (2 סלעים), התבלין והדבש (שניהם יחד, סלע אחד). כשם שערך היין לפני השבח הוא $\frac{2}{3}$ מסך כל התערובת (שני סלעים

---

[24] משנה, מעשר שני ב, א.

[25] פירוש ר״ע מברטנורה למשנה זו.

מתוך שלושה), כך ערך פדיונו יהיה שווה ל-$\frac{2}{3}$ לאחר השבח. כלומר, $\frac{2}{3}$ מתוך 4 סלעים, שהם $2\frac{2}{3}$ סלעים, שכן $4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

ערך פדיון היין לאחר ההטבה:[26] $\frac{2\cdot4}{2+1} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

בספר שמות, בפרשת תרומה, מצווה ה' את בני ישראל על בניית המשכן וכליו. וכך נאמר שם: 'ככל אשר אני מראה...את תבנית המשכן ואת תבנית כל כליו וכן תעשו'.[27]

דברי המפרשים בעניין:

מפרש רש"י:

> וכן תעשו – לדורות. אם יאבד אחד מן הכלים, או כשתעשו לי כלי בית עולמים, כגון שולחנות ומנורות וכיורות ומכונות שעשה שלמה. כתבנית אלו תעשו אותם, ואם לא היה המקרא מחובר למעלה הימנו, לא היה לו לכתוב: **וכן** תעשו, אלא כן תעשו, והיה מדבר על עשיית אוהל מועד וכליו.[28]

לדברי רש"י, ו' החיבור במילה 'וכן' באה לרבות את העשייה לדורות באותה תבנית. מקשה הרמב"ן: 'ולא ידעתי שיהיה זה אמת, שיתחייב שלמה לעשות כלי בית עולמים כתבנית אלו, ומזבח הנחושת עשה שלמה עשרים אמה אורך ועשרים רוחב.[29] לעומת מזבח הנחושת במשכן, שמידותיו היו: 'חמש אמות אורך וחמש אמות רוחב רבוע יהיה' (שמ' כז 1).

רבי אליהו מזרחי (הרא"ם) מיישב את הקושיה במושגים גאומטריים:[30]

> מפני שאין פירוש כתבניתם כתבנית אלו כמידתם, אלא שיהוו צלעות שטחיהן מתדמות יחס האורך אל האורך כיחס הרוחב אל הרוחב, וכיון שיחס האורך של מזבח הנחושת של שלמה אל יחס האורך המקורי, כיחס הרוחב של שלמה אל הרוחב המקורי, דימה שניהם בתבנית אחת, אעפ"י שזה של משה היה חמש על חמש, ושל שלמה היה עשרים על עשרים. שאם הייתה זווית א"ב שווה לזווית ה"ו, ויחס א"ב אל ה"ו כיחס א"ד אל ה"ח, יקראו שני שטחי אבגד הוזח מתדמים, ואף על פי שהאחד גדול מהאחר, ויאמר עליהם שווים כתבניתם.

ניסוח הבעיה והוכחתה בשפה מתמטית בת זמננו:

> נתון: מידות מזבח הנחושת במשכן: 5 על 5. מידות מזבח הנחושת שבנה שלמה המלך: 20 על 20.[31]
> שני המזבחות שווים בתבניתם. הוכחה: אין כאן זהות מידות, המעידה על חפיפה, אלא דמיון בין הצורות – שניהם בצורת ריבוע, וכל זוויותיהם ישרות.

---

[26] רוזנבוים (לעיל הערה 1), עמ' 84.
[27] שמ' כה 9.
[28] פירוש רש"י לשמ' כה 9.
[29] דה"ב ד 1.
[30] פירוש הרא"ם לדה"ב ד 1.
[31] רוזנבוים (לעיל הערה 1), עמ' 70.

פָּלִינְדְרוֹם

פלינדרום הוא רצף של סמלים (אותיות, מספרים, צבעים, יחידות מבנה כימיות או ביולוגיות), שקריאתו מכיוון אחד לעבר הכיוון השני וקריאתו בכיוון ההפוך נותנות תוצאה זהה. מקורה של המילה פלינדרום הוא יווני – palindromos, ומשמעות מושג זה היא 'לקרוא שוב בכיוון השני'. המילה פלינדרום מורכבת למעשה משתי מילים יווניות: palin – שוב, ו־dromos – ריצה.

הרעיון של מציאת מילים או משפטים הנקראים בשני הכיוונים באופן זהה, מיוחס כנראה למשורר היווני סוטאדס (Sotades), בן המאה השלישית לפנה"ס. דוגמאות לשמות פלינדרומיים מן התנ"ך: דוד, ישי. האקדמיה העברית העניקה שם עברי לפלינדרום: 'מילה מתהפכת', מחווה לחיבוריו הפלינדרומיים של אבן עזרא[32].

פלינדרומים מספריים הם מספרים טבעיים סימטריים, שאם קוראים אותם מימין לשמאל או משמאל לימין, מתקבל מספר זהה. דוגמה: 1364631 הוא פלינדרום בעל 7 ספרות. נושא מתמטי הקרוב מבחינה רעיונית לפלינדרומים הוא סימטרייה של שיקוף.

כלל מתמטי הוא שכל פלינדרום מספרי מסדר זוגי, דהיינו בעל מספר זוגי של ספרות, מתחלק ב־11 ללא שארית. לדוגמה, מספר מסדר 4 – 1221, מספר מסדר 8 – 39522593 – הם יתחלקו ב־11 ללא שארית, וכן הלאה.

במדעי החיים פותחה בשנים האחרונות טכנולוגיה מהפכנית המבוססת על סידור פלינדרומי של בסיסים נוקלאוטידיים ברצפי DNA.[33] מדובר על טכנולוגיית CRISPR (Clustered Regularly Interspaced Short Palindromic Repeats), שמשמשת בין היתר לעריכת DNA. במערכת זו משתמשים בתכונה של חיידקים לחסן את עצמם בפני בקטריופאג'ים – וירוסים קוטלי חיידקים. כאשר וירוס תוקף חיידק, רצפי DNA קצרים (באורך של כ־20 בסיסים, הנקראים 'ספייסר'-Spacer) של הווירוס התוקף מוטמעים לתוך ה־DNA החיידקי, ושם הם נמצאים בין רצפי DNA פלינדרומיים קצרים יחסית שחוזרים על עצמם. אם וירוס זהה ייכנס לחיידק שמכיל אותם מקטעי DNA שבין הרצפים הפלינדרומיים, ישועתק RNA על פי רצפי הספייסר, וה־RNA יזהה ויתחבר למקטע DNA של הווירוס שחדר ושזהה למקטע הספייסר שבין הפלינדרומים. לאחר מכן, ה־RNA יגרור את ה־DNA הוויראלי לאנזים החיידקי CAS–9, וזה ישמש כמספריים ויחתוך את ה־DNA הוויראלי, וכך למעשה ינוטרל הווירוס התוקף. חוקרים מנצלים תכונה זו לבניית רצפי DNA פלינדרומיים שיכוונו את האנזים CAS–9 לחתוך DNA בכל מקום הרצוי להם.

הפלינדרום במשמעותו המתמטית במקורות

בספר שמות נכתב כך: 'כי תשא את ראש בני ישראל לפקודיהם, **ונתנו** איש כופר נפשו'.[34] בעל הטורים מפרש פסוק זה ועומד על הרעיון הידוע של הדרסטריות שבנתינת הצדקה בבחינת: 'יותר ממה שעושה בעל הבית עם העני, עושה העני עם בעל הבית'. הוא שם ליבו אל הפלינדרום '**ונתנו**' המופיע בתוך הפסוק, ואלו הם דבריו:

---

[32] רבי אברהם אבן עזרא (ראב"ע) – פלינדרום.

[33] L. Cong et al., 'Multiplex Genome Engineering Using CRISPR/Cas Systems', *Science*, 339,6121 (2013), pp. 819–823; P. D. Hsu et al., 'Development and Applications of CRISPR-Cas9 for Genome Engineering', *Cell* 157,6 (2014), pp. 1262–1278.

[34] שמ' ל 12.

'"ונתנו" — אם תקראנה למפרע יהיה גם כן **ונתנו**, לומר לך כמה מה שאתה נותן לצדקה יחזור אליו ולא יחסר לו בשביל זה כלום'.[35]

תור הזהב של יהדות ספרד הצטיין במשוררים ובאשפי כתיבה, שהוציאו בין היתר תחת ידם פנינים פלינדרומיות. דברי ימי הפלינדרום העברי נפתחים בחכמים ר' אברהם אבן עזרא (1089—1164) ור' יהודה אלחריזי (1165—1234).[36] ב'מחברת האותיות המתהפכות' מתוך 'מחברות איתיאל' שכתב יהודה אלחריזי במאה השלוש עשרה, הוא מביא שיחה בין חברים ובה חרוזים וביטויים פלינדרומיים:

> אמר המגיד: והיתה חברתנו חבור נחמד / ומספרנו כמספר אצבעות היד / ויתחיל העומד לימיני / אשר היה השטן לשטני / ויאמר: **בחר בלב רחב** / ויען אחר ויאמר: **חון לדל נוח** / ויאמר האחר: **חבש לכל שבח** / ויען הרביעי ויאמר: **רצון היה נוצר.**

אברהם אבן עזרא נולד וגדל באנדלוסיה, ספרד, וחונך הן על ברכי היהדות והן על ברכי התרבות הערבית והמדעים. הוא יצא לאירופה – איטליה, צרפת ואנגליה, וכתב מאמרים תיאולוגיים רבים ופרשנות למקרא, ובמקביל כתב חיבורים מדעיים רבים שעסקו בהנחלת מיומנויות טכניות מדעיות בסיסיות במתמטיקה ואסטרונומיה, וכמו כן כתב אנציקלופדיה להוראת יסודות האסטרולוגיה. חיבוריו נכתבו בעברית, והדבר היווה קושי ברור, עקב אימוץ מונחים לועזיים לשפה העברית בשל היותם של היהודים בגלות. אך דווקא צורך זה בשילוב מינוחים חסרים גרם להגברת מאמציו של הראב"ע לחפש בלשון העברית אחר מושגים עבריים שניתן לשלב בכתביו המדעיים.[37]

האבן עזרא יצר פלינדרומים רבים, ומהם נביא שניים. רבי אברהם אבן עזרא שאל את בורא העולם שאלה פלינדרונמית: 'אָבִי, אֵל חַי שִׁמְךָ, לָמָּה מֶלֶךְ מָשִׁיחַ לֹא יָבֹא?' דהיינו, הקב"ה, אבי אל חי, שזהו שמך, למה המשיח מתמהמה? ותשובתו הייתה אף היא בפלינדרום: 'דעו מאביכם כי לא בו אבוש, שוב אשוב אליכם כי בא מועד'. רוצה לומר: המשיח יבוא במועד המתאים (כשיבוא המועד).

יש אגדה המספרת על אישה שהגיעה אל הרב עם קדרת דבש ובתוכה זבוב קטן. הרב הסתכל לתוכה ואמר: 'אכן זבוב הוא, וכידוע לך באכילת חרקים עוברים על חמישה לאווים (איסורים מהתורה)'. ביקשה האישה פתרון, ולאחר זמן כתב לה אבן עזרא:

איור מס' 2. הפלינדרום של האבן עזרא בעניין הזבוב

[35] בעל הטורים בפירושו לשמ' ל 12.

[36] אלחריזי תרגם את המשורר הערבי אלחרירי ב'מחברת האותיות המתהפכות'. ראו גם: ק' זיסקין, 'חיבורים מתמטיים של שני חכמי ספרד: אברהם בר־חייא ואברהם אבן עזרא', על"ה, 33 (תשס"ה), עמ' 12—22; ז' דויטש וע' קדרי, 'יבין ניבי: על פלינדרומים ועל מספרים פלינדרומיים', אלף אפס, 16 (2001), עמ' 2—8.

[37] ש' סלע, 'דרכו המיוחדת של אברהם אבן עזרא ביצירת אוצר מלים מדעי עברי', זמנים, 73 (2000—2001), עמ' 10—18.

וההסבר: פרשנו – הפירוש שלנו, הרעבתן, אותו זבוב שבדבש, נתבער ונשרף – בגלל חום התבשיל. מאחר שהזבוב קטן והתבשיל רב, מוציאים מעט מהתבשיל עם הזבוב, ואת שאר התבשיל אפשר לאכול.

נביא כאן את הספדו של ר׳ יהודא הירש על אביו רש״ר הירש, שהוא פלינדרום בן 248 אותיות:

> הרועים וקראים בשם המה מתי אל, מצקם, לתום העלב לטב ומשגב ומעז, אף כי אפר יותך מצחם, לא תבטל זכותם, תעל תחן לחיש נצר חקיו תומך הוא דוד, מי כאלם נחלש הדוה יחבש, צמח מישי לעין כל יבא וינוד אל מעון ישית מתחת: אז יתודע בתך המחנה יפי תואר אנשי חיל, כרובי בקע ים, ונטעי רוח ספרך ה׳ מסיני וחורב, פחד מינים, והתאר קבר שרי ה׳, יתנו יקר לאפרן ושמש נרם ירום: יבא יראה ויזרח שכנת יה לעם נוצר למענם: מליציו הנה דע הביטה חיש משיח! ידעתי ראש וראשן הלא הורי העד במי בער בל יכשל, תם בא בעשר אשדת יאשדו, מכח ברקי חרטו כלה חשך וצלמות, ידע להניב רוח לו, מלתו לבת אש מתחת צבורו ייחם, שונא לרמיה, נועם עטו לטוב יוקח רפוי לב, בל יופר חק ויבוטל, וטעם עון הימר לאנוש: מחייו רובץ תחת משא תבל ותלמו לחורב ינהל עד יתום לץ, וכשח הלך וטרח יקרב חכם, ודשאי תדשא רשע באבם תלש, כי לב רעבים בדעה ירוה: אלה נשארו שארית עד יחיש משיח, הטיב ה׳ עד הנה ויצילם מן עמל! רצון מעלה יתן כשחר זיו הארי אבי מורי מרן שמשון רפאל רק יונתי ׳הירש רב׳ קראתהו, מינים דחף, ברוחו יניסם, ה׳ כרפס חור יעטנו, מיעקב יבורך! לי חיש נא ראות יפי הנחמה! כתב עדותי זאת חתמתי שי נועם לאדוני ואבי, לכן יעל ישים חמץ שבח יהודה שלחן מלאכים, דוד אוה כמותו יקח רצן שיח לנחת לעת מתו כ״ז לטבת: אל מחץ מכתו ירפא יכפא זעמו, בגשם ובטל בלע המות, למקצם לא יתמהמה, משבם יאר קומי עורה! [38]

חזקות ולוגריתמים

העלאה בחֶזְקָה היא פעולה המתבצעת בין שני מספרים: ׳הבסיס׳ ו׳המעריך׳. מסמנים חזקה בסימון a^b , כאשר a הוא הבסיס ו־b הוא המעריך. בצורתה הבסיסית ביותר, שבה הבסיס הוא מספר ממשי והמעריך הוא מספר טבעי, מהווה החזקה קיצור של פעולת הכפל בין גורמים זהים, כלומר, a בחזקת b הוא המכפלה של b גורמים השווים כולם לבסיס: $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n}$

דוגמה: $$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

לוגריתמים – פעולת הלוגריתם היא פעולה הפוכה לפעולת החזקה. נתבונן במשוואה $a^n = b$.

---

[38] ר׳ יהודא הירש, נדלה בתאריך 26.3.2020 מתוך: http://schvarczfamily.blogspot.com/2010/05/blog-post_11.html

בעזרת פעולת הלוגריתם, ניתן למצוא את המעריך n. הפעולה מסומנת בעזרת log.

על מנת למצוא את n, מוציאים משני האגפים log על בסיס a, ומקבלים: $n = \log_a b$.

כלומר, עונים על השאלה: 'באיזו חזקה יש להעלות את a כדי לקבל את b?'

המושג חזקות במשמעותו המתמטית במקורות

הגמרא מביאה סוגיה בעניין חשיבות מצוות ביקור חולים' ואת התועלת שיש לחולה מן הביקור:

> אמר רבי אחא בר חנינא: כל המבקר חולה נוטל אחד מששים בצערו. אמר ליה: אם כן ליעלון שיתין (יעלו שישים) ולוקמוה (ויבריא). אמר ליה: כעישורייתא דבי רבי ובבן גילו[39] דתניא בת הניזונת מנכסי אחיו נוטלת עישור נכסים... אמר להן ראשונה נוטלת עישור נכסים שניה במה ששיירה, שלישית במה ששירה, וחוזרות וחולקת בשווה.[40]

הסבר הגמרא בלשוננו:

> אמר רבי אחא בר חנינא, שיש תועלת לחולה מהבאים לבקרו, שהמבקרים נוטלים מן החולה אחד משישים מחוליו. אמרו לו, אם כדבריך, הרי יש לנו עצה לרפא כל חולה, והיא שיבקרו אותו שישים בני אדם ויעמידוהו מחוליו, שהרי כל אחד נוטל אחד משישים מצערו, ומכיוון שיש שישים בני אדם, ייטלו בכך את כל צערו ומיד יתרפא. אמר להם, שאין המבקר נוטל מן החולי אלא כעישורייתא דבי רבי.[41] כלומר, מי שיש לו עשר בנות ובן אחד, הראשונה נוטלת עישור נכסים, והשנייה – במה ששיירה, וכן לכולן. ומפרש בש"ס ירושלמי: 'נמצאו בנות שנוטלות במנה תרי תילתי פחות ציבחר (שני שלישים פחות מעט) והאי (הוא) תלתא ומוסיף ציבחר (שליש ומעט יותר) וגבי חולה נמי (גם) מבקר הראשון נוטל אחד משישים בחוליו והשני א' משישים במה ששייר'. כך גם במצוות ביקור חולים, שכל מבקר נוטל אחד משישים ממה שהשאיר קודמו, על דרך 'עישורייתא דרבי'. הקיש מצוות 'ביקור חולים' לעניין 'עישורייתא דרבי'.

דברי המפרשים בעניין:

רש"י מבאר:[42] ייכנסו 60 בני אדם לבקרו, וייטול כל אחד ואחד משישים בצערו, ומייד מתרפא. אמר להם, שאין המבקר נוטל מן החולי אלא כעישורייתא דבי רבי, ובבן גילו – בחור כמותו או זקן לזקן.

הר"ן והרא"ש מבארים: 'ובבן גילו'- שנולד המבקר במזלו של החולה.

ניסוח הבעיה והוכחתה בשפה מתמטית בת ימינו:

---

[39] רש"י, שם, ד"ה ובבן גילו, פירש כך: 'בחור כמותו או זקן לזקן'. אולם הר"ן, שם, ד"ה ובבן גילו, פירש כך: 'שנולד המבקר במזלו של חולה'. וכן מפרש הרא"ש: 'שנולד במזלו'.

[40] בבלי, נדרים לט ע"ב.

[41] אב שנפטר והוריש נכסיו לבניו, ונשארו בנים ובנות. הדין הוא שהבנות ניזונות מן הנכסים הללו, וכשהן נישאות מקבלות הן גם נדוניה מהנכסים. רבי קבע ששיעור הנדוניה שכל בת מקבלת היא עשירית מהנכסים. וכל בת עם נישואיה, מקבלת עשירית מהנכסים שנשארו.

[42] ביאור המפרשים: רש"י, הר"ן והרא"ש על אתר.

לאחר 60 מבקרים, יישאר אצל החולה מעט יותר מ־$\frac{1}{3}$ מחוליו.

החלק הנותר לאחר כל מבקר (מתוך השלם היחסי): $1 - \frac{1}{60} = \frac{59}{60}$

החלק הנותר מן החולי לאחר 60 מבקרים:[43] $(\frac{59}{60})^{60} = 0.364$

$0.364 > \frac{1}{3}$

נמצא שתמיד נשאר משהו מהמחלה אצל החולה. כל זאת כמובן מדובר כאמור, כשכל המבקרים הם בני גילו של החולה, שכן זהו תנאי הכרחי לנטילת חלק מחוליו. כך גם, מי שיש לו עשר בנות ובן אחד, הראשונה נוטלת עישור נכסים, והשנייה – במה ששיירה, וכן לכולן. ׳.

עצרת וצירופים

עצרת היא התוצאה של הכפלת כל המספרים הטבעיים העוקבים מ־1 עד למספר נתון n. שם המכפלה הוא n עצרת, ומסמנים אותה כך: $n!$.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ עבור: $n=5$: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

לציון עצרת של n שימש בעבר הסימן $\underline{|n}$, אך סימן זה לא היה נוח למדפיסים, ובעקבות הצעתו של המתמטיקאי כריסטיאן קראמפ משנת 1808, מקובל לסמן את העצרת בסימן – !. העצרת היא פעולה אונארית (המתבצעת על איבר בקבוצה ותוצאתה היא איבר בקבוצה), שאפשר להגדיר ברקורסיה לפי הנוסחה: $n! = (n-1)! \cdot n$ כשתנאי ההתחלה הוא $0! = 1$.[44]

פונקציית העצרת משמשת בסטטיסטיקה ובקומבינטוריקה. דוגמה: מספר הסידורים האפשריים להעמיד 6 חיילים בשורה הוא 6 עצרת, כלומר 720. (ובמקרה הכללי, מספר הסידורים להעמיד N פריטים בשורה הוא $N!$).

צירופים – צירוף הוא מספר האפשרויות לבחור k פריטים מתוך n פריטים שונים בלי חזרות, כאשר אין חשיבות לסדר הבחירה. בחיי היומיום, בעיות של צירופים הן שכיחות למדי. הסימן $\binom{n}{k}$ (קרי, n על k או k מתוך n) או C_n^k מסמן את מספר האפשרויות לבחור k איברים (פריטים) מתוך n איברים (מקומות) שונים, כאשר אין חשיבות לסדר וללא חזרה (אין לבחור איבר יותר מפעם אחת באותה בחירה).

הנוסחה למציאת מספר אפשרויות זה היא: $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = C_n^k$ (כאשר $k > 0$).

[43] רוזנבוים (לעיל הערה 1), עמ׳ 12.

[44] מתוך אתר ויקיפדיה

וכאשר $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$

n = מייצג את סך כל האיברים.

k= מייצג את מספר האיברים אותם אנו רוצים לבחור.

בשל חשיבותה של פעולה זו, המחשבת את מספר הצירופים האפשריים, יש לה סימן ייחודי $\binom{n}{k}$, והיא מכונה מקדם בינומי.

דוגמה: בהגרלת לוטו עולים בגורל שבעה מספרים מתוך שלושים. כמה תוצאות אפשריות יש להגרלה? (סדר האיברים שעלו בגורל אינו משנה, ואיננו יכולים לבחור את אותו איבר פעמיים.)

עצרת, צירופים במשמעותם המתמטית במקורות

בספר 'הכוזרי' של רבי יהודה הלוי (ריה"ל) מופיע המושג 'רלא שערים', כתוצאה של כל הצירופים האפשריים של 22 האותיות, זוג בכל צירוף, וכדבריו: 'בהתמזג האותיות הנפרדות אל"ף עם כולם וכולם עם אל"ף, בי"ת עם כולם... נמצא כל הדיבור יוצא במאתיים ושלושים ואחד שערים'.[45] בפירוש 'אוצר נחמד' מופיעות מספר טבלאות להוכחת המספר 231. באמצעות שימוש בנוסחה מתמטית, העוסקת בשיטת הצירופים, נחשב:

מספר החליפות של 22 עצמים לפי 2 הוא 231. $C_{22}^{2} = \frac{22!}{2!(22-2)!} = 231$

לכן, מספר האפשרויות לצירופן של 22 אותיות לקבוצות בנות שתי אותיות הוא 231.

רבי אברהם אבן עזרא (ראב"ע), היה חכם גדול ומופלג בחוכמת התורה ובכל החוכמות, וחיבר ספרים רבים ועמוקים בעניינים אלו. במהלך שנות נדודיו באיטליה חיבר ספרים שונים, וביניהם את ספרו 'ספר המספר'. אחר כך נדד לצרפת, וגם שם חיבר ספרים רבים, וביניהם: 'ספר יסוד המספר' ו"ספר האחד'. הרמב"ם שיבח מאוד את חיבוריו, וציווה לבנו לעסוק בחוכמה זו.[46]

ראב"ע היה בקי בחוכמת האסטרונומיה (בלשון חכמי ימי הביניים – תכונה). הוא השתמש בשיטת הצירופים לחישוב מספר ההתקבצויות השונות של שבעת גרמי השמיים, ומצא 120 אפשרויות. בלשונו: 'וגם אל צבא השמיים מלמעלה... לעולם משתנה עד אין חקר, כי פעם מתחבר לאחד השבעה המבטים. והינה המחברות לבדם... הם מאה ועשרים'. מתוך שבעת גרמי שמיים, מספר האפשרויות לקבלת קבוצות של 2, 3, 4, 5, 6 ר־7 הוא:

$$C_{7}^{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$$

$$C_{7}^{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

[45] י' הלוי, ספר הכוזרי, תרגום י' אבן תיבון, מאמר רביעי, פסקה כה. מובאות מספר יצירה.

[46] מ' מרגליות (עורך), 'רבי אברהם אבן עזרא (ראב"ע)', אנציקלופדיה לתולדות גדולי ישראל, א, תל אביב תש"ו, עמ' 83–95.

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = 35$$

$$C_7^5 = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21$$

$$C_7^6 = \frac{7!}{6!\cdot 1!} = 7$$

$$C_7^7 = \frac{7!}{7!\cdot 0!} = 1$$

סך כל הצירופים הוא: 120= 1+ 7+ 21+ 35+ 35+ 21.[47]

בספר בראשית יעקב אמר ללבן: 'ותחלף את משכורתי עשרת מונים'.[48] נביא את דברי המפרשים בעניין.

מהרי"ל דיסקין מסביר: 'איתא בד' (- בדברי) רז"ל: עשרת מונים – עשר פעמים עשרה, שהם מאה'.[49]

מקשה מהרי"ל: כיצד ייתכן להחליף ולשנות בזמן כל כך קצר, 100 פעמים, נקוד וטלוא בעיזים, וחום בכבשים? והוא מתרץ: חמישה מראות נזכרו בפרשה: 1. עקוד 2. נקוד 3. טלוא 4. ברוד 5. חום. 'וידוע הדבר, שמחמשת אותיות יכולין לחבר ולצרף עשרה תיבות, שתהיה כל אחת שונה מחברתה: 1. אב, 2. אג, 3. אד, 4. אה, 5. בג, 6. בד, 7. בה, 8. גד, 9. גה, 10. דה. כן בכבשים וכן בעיזים... וכשנולדו כן כמו שהתנה, דהיינו, ע"נ (עקוד נקוד) מן הכבשים, וע"נ מן העיזים, אמר: לא כך אמרתי, אלא צירוף 1 מן העיזים וצירוף 2 מן הכבשים... וכן לעולם עד מאה...'.

ניסוח הבעיה והוכחתה בשפה מתמטית בת־זמננו:
מספר האפשרויות לצירוף של 5 איברים לקבוצות בנות 2 איברים הוא 10 (סדר האיברים לא משנה).

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = 100$$

סוד הקמע של ר' יהונתן אייבשיץ

ר' יהונתן אייבשיץ היה מגדולי חכמי אשכנז במאה השמונה עשרה. הוא היה דרשן, פרשן, ראש ישיבה ומקובל. עוד בצעירותו ניכר בכישרונותיו יוצאי הדופן, בחריפותו ובכוח זיכרונו. ר' יהונתן אייבשיץ ששימש כרב קהילה וככותב רבני מוערך ונערץ, התייחס בכתביו רבות ליחס בין המדעים לתורת ישראל. הוא הזכיר בחיבוריו מאות רבות של פריטי ידע מדעי, חדשים וגם ישנים. לדוגמה, התער של אוקהאם בן המאה הארבע עשרה, השיטה ההליוצנטרית, מחזור הדם של הארווי, פנס הקסם (Laterna magica), מחקר הכוח המגנטי, כתמי השמש ושביל החלב – כל אלה הן דוגמאות למושגים מדעיים שנידונו כולם בתקופתו, בסוף המאה השבע עשרה עד תחילת המאה השמונה עשרה. ר' יהונתן הדגיש שמקור כל החוכמות הוא בתורה, אך הוא היה מודע

---

[47] א' שישא, מתמטיקה ומתמטיקאים, גבעתיים ורמת גן 1977, עמ' 118.
[48] בר' לא 41.
[49] הרב י"ל דיסקין, חידושי מהרי"ל דיסקין על התורה, ירושלים תשמ"ה, עמ' 75–76.

לכך שבתחום המדעים התרחשה בדורותיו התקדמות אדירה, הן בדרכי הטיעון וההיסק – המתודה המדעית, והן בהישגים ובפיתוח התיאוריות המדעיות.[46]

אגדות רבות התהלכו סביב פיקחותו ושנינות לשונו של ר׳ יהונתן אייבשיץ. נוסף על התלמוד, הוא התעמק בזוהר ובכתבי האר״י הקדוש, וכן למד פילוסופיה, אסטרונומיה ומדעים שונים. רבי יהונתן עמד בראש ישיבה בפראג והעמיד אלפי תלמידים. בגלל מחלוקת, עבר לעיר מץ. רבי יהונתן חיבר ספרים תורניים רבים – ספרי הלכה, ספרי אגדה וחסידות וכן ספרי קבלה. בהיותו מקובל ואיש מופת, העניק קמעות לסגולה.[47] כאשר כיהן בעיר מץ, הציל את היהודים תושבי עירו מגזירת הגירוש, הודות לידיעותיו בתחום המספרים.

וזהו סיפור המעשה:[50]

> פעם אחת גזר ההגמון של העיר מץ לגרש את כל היהודים מעירו. מיהר אליו ר׳ יהונתן כדי לשדלו לחזור בו מהגזירה הקשה. במהלך השיחה ביניהם, ציטט ההגמון מאמר מהברית החדשה, ושאל את ר׳ יהונתן: כמה מילים במאמר המצוטט? מיד ענה ר׳ יהונתן: שבע עשרה מילים כמניין האותיות במאמר ׳עם ישראל חי לעולמי עד׳, ללמדך על חוסר הצלחתן של גזירות רעות שגוזרים על היהודים. שְאלו ההגמון: כמה יהודים בעיר מץ וסביבותיה? השיב ר׳ יהונתן: 45,760 איש. אמר לו ההגמון בלגלוג: אתה ידוע ומפורסם ככותב קמעות נפלא מאין כמוך. אם תצליח תוך שעה לכתוב קמע בגודל מזוזה, ובו יהיה אפשר לקרוא את המאמר ׳עם ישראל חי לעולמי עד׳ 45,760 פעם כמספר יהודי מץ, אבטל את גזירתי. הלך ר׳ יהונתן לביתו, ואחרי שעה, חזר ובידו הקמע. הושיטו להגמון, והסביר לו שניתן לקרוא את המאמר מהאות **ע׳** שבמרכז הקלף עד לאחת מהאותיות ד׳ שבפינות, בדיוק 45,760 פעמים לכל צד. ההגמון ביטל את הגזירה מיד. אולם רק בתום שנה, לאחר שמנה את כל האפשרויות, נוכח לדעת כי הרב צדק, ובירכו: ׳ברוך שחלק מחוכמתו ליראיו׳.

איזו שיטה מתמטית מוצפנת בקמע הפלאי?

במטריצת הקמע ניתן להבחין בארבע תת־מטריצות סימטריות ביחס למרכז, לאות ע׳ הגדולה. כל מטריצה מורכבת מעשר שורות על שמונה טורים.[51] המאמר ׳עם ישראל חי לעולמי עד׳ מכיל 17 אותיות. כדי לקרוא 17 אותיות, עלינו לעבור מאות לאות 16 פעמים. מהאות העליונה/התחתונה ניתן לרדת/לעלות תשע פעמים בתוך עשר שורות. מהאות הצדדית ניתן להשמאיל/להימין שבע פעמים בתוך שמונה טורים. כל קריאה אחת של המאמר ניתן לראותה כמסלול אחד ליצירת סדרה בת (1+) 16 תווים. מספר המסלולים הוא כמספר האפשרויות ליצירת הסִדרה המבוקשת. מספר האפשרויות הוא מספר הצירופים של 9 מתוך 16 או 7 מתוך 16. הקמע מכיל ארבע תת־מטריצות, ולפיכך סך כל האפשרויות הוא:[52]

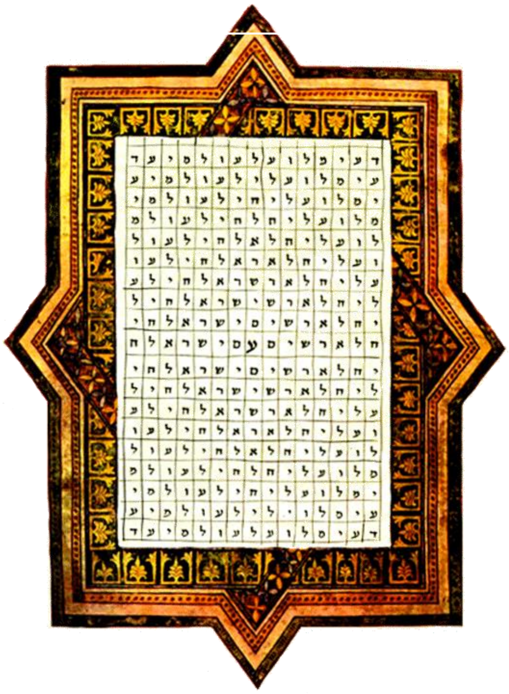
$$4 \cdot \frac{16!}{7! \cdot 9!} = 45,760$$

---

[50] י׳ ילין, ׳סוד הקמע׳, אלף אפס, 15 (תש״ס), עמ׳ 20.

[51] המטריצה הראשית מורכבת מ־19 שורות על 15 טורים, מספרים אי־ זוגיים. על כן, המטריצות הסימטריות למרכז יש להן שורה/ טור משותפים.

[52] ילין, שם.



איור מס׳ 3. הקמע של ר׳ יהונתן אייבשיץ

איור מס׳ 4. מטריצת הקמע של ר׳ יהונתן אייבשיץ

אינדוקציה

אינדוקציה – תהליך של הסקת מסקנה בדרך של מהפרט אל הכלל. משמעות המילה אינדוקציה בשפה הלטינית היא השראה, ובהקשר שלנו, השראה לרעיון, כלל או נוסחה כלשהם. במדע, אינדוקציה היא הדרך שבה מסיקים מסקנה ממקרים פרטיים ועוברים מהם לקביעה כללית. התהליך ההפוך נקרא ׳דדוקציה׳. לדוגמה, אם כל החסידות שנראו עד כה הן לבנות, אפשר להסיק באינדוקציה שכל החסידות הן לבנות. האינדוקציה היא שיטת הסקה מקובלת בכל תחומי המדע (פרט למתמטיקה, שם נעשה שימוש באינדוקציה מתמטית). הוכחה באינדוקציה היא כלי בעל חשיבות רבה מאוד במתמטיקה. הוא בא לידי ביטוי במקרים רבים שבהם אנו נדרשים להוכיח נכונות של טענות המנוסחות בעזרת מספרים טבעיים. במקרים רבים אלו, הדרך הקלה היא שימוש באינדוקציה מתמטית.

אינדוקציה אינה צורת חשיבה אינטואיטיבית למרבית האנשים, ולכן נהוג להסביר אותה באמצעות מבנה דומינו. כידוע, כאשר מסדרים קוביות דומינו בשורה, הפלה של הקובייה הראשונה גורמת לנפילת הקובייה הבאה וכן הלאה, עד אשר כל שאר הקוביות נופלות. עקרון האינדוקציה מזכיר זאת במידה רבה. נתבונן על אינדוקציה בדומינו. נניח שיש שורה של קוביות דומינו. ידוע שאם קובייה נופלת, היא מפילה את כל השאר. אם אנו בוחרים להפיל את הקובייה הראשונה, אז אנו יודעים (באינדוקציה) שכל שאר הקוביות ייפלו (אילו היינו בוחרים להפיל את הקובייה השנייה, כל הקוביות היו נופלות פרט לראשונה). הפלת הקובייה הראשונה נקראת ׳בסיס האינדוקציה׳, ואילו העובדה שכל קובייה מפילה את הבאה אחריה אם היא בעצמה נופלת, היא שלב האינדוקציה. הטענה ׳קובייה מסוימת נפלה׳ תיקרא הנחת האינדוקציה. כלומר, אנו מניחים שקובייה מסוימת נפלה, ובודקים אם זו שבאה אחריה תיפול גם היא כתוצאה מזה. אם באמת נפילה של קובייה גורמת תמיד לנפילת הקובייה הבאה בתור, והקובייה הראשונה נפלה, אזי כל הקוביות ייפלו.

לאחר שהבנו זאת, נתבונן על עקרון ההוכחה באינדוקציה. בהוכחות באינדוקציה, יש מבנה קבוע ומוגדר מראש שצריך לעקוב אחריו. מבנה זה עשוי לעזור להבין אינטואיטיבית את ההוכחה, הוא מקל על הבנתה, והוא אף הכרחי כדי שההוכחה תהיה קבילה כהוכחה מתמטית. בהוכחה באינדוקציה אין להשמיט אף אחד מהשלבים הללו. חוסר דיוק בהוכחות באינדוקציה עלול לאפשר לנו 'להוכיח' טענות שכלל אינן נכונות או שהן טענות חסרות כל משמעות (כמו למשל הטענה: 'כל מספר טבעי הוא מעניין').

אינדוקציה מתמטית היא שיטת הוכחה לטענות על המספרים הטבעיים. היא מבוססת על העיקרון, שאם טענה הנה נכונה למספר מינימלי כלשהו n_0, ואם העובדה שהטענה מתקיימת עבור n גוררת שהטענה נכונה גם עבור $n+1$, אזי בהכרח הטענה מתקיימת לכל $n \geq n_0$.

מבנה ההוכחה באינדוקציה:

טענה שניתן להוכיח באינדוקציה, היא טענה שתלויה במספר טבעי כלשהו (סימון מקובל במקרה זה הוא n). לגבי הטענה, עלינו להוכיח שהיא מתקיימת לכל מספר טבעי בכלל, ולצורך זה יש לבצע את שלושת שלבי ההוכחה באינדוקציה:

- שלב א': בסיס האינדוקציה (מפילים את קוביית הדומינו הראשונה): בדיקת הנוסחה למקרה פרטי (או למקרים פרטיים), שבו רואים את נכונות הטענה עבורו (או עבורם).
- שלב ב': הנחת האינדוקציה (מניחים שקובייה מספר n נפלה): מניחים שעבור מספר כלשהו – למשל, $n = k$ – הטענה נכונה, ומנסחים את הטענה עבור אותו מספר.
- שלב ג': צעד האינדוקציה (בודקים שהקובייה הבאה נופלת אם הקודמת נפלה): מנסחים את הטענה עבור המספר העוקב $n = k + 1$, ומוכיחים אותה. ניתן להיעזר בהנחה לצורך ההוכחה, וברוב המקרים היא הכרחית.

לאחר ביצוע כל שלושת השלבים, יש להוסיף את המסקנה ש"על סמך משפט ההוכחה באינדוקציה, הטענה נכונה לכל מספר טבעי'. ניתן לסיים אותה בכל דרך.

איור מס' 5. האפקט הסדרתי של אבני דומינו נופלות

מבין המתמטיקאים, רבי לוי בן גרשון (רלב"ג)[53] היה הראשון שמצא את השיטה לאינדוקציה מתמטית. מתמטיקאים אחרים השתמשו בשיטה זו ביישומים שונים, אך היה זה הרלב"ג שהגדיר לראשונה את השימוש הייחודי של שיטתו, והסדיר את מבנה ההוכחה, נתן לה שם תיאורי מתאים, והפעיל אותה כדי להשיג תוצאות מתמטיות

[53] N, L. Rabinovitch, 'Rabbi Levi Ben Gershon and the Origins of Mathematical Induction', *Archive for the History of Exact Sciences*, 6,3 (1970), pp. 237–248.

שונות, אם כי כוחה המשמעותי של שיטה זו לא בא לידי ביטוי לפני התקופה המודרנית. הרלב"ג כתב כמה ספרי מתמטיקה, וספרו 'מעשי חושב' הוא החיבור המוקדם ביותר הידוע שבו נעשה שימוש באינדוקציה מתמטית באופן שיטתי ושהכיר בשיטה זו כהליך מתמטי ייחודי.

רלב"ג נולד בבאניול־סור־סז בצרפת בשנת 1288, והוא היה חכם תלמודי, פילוסוף, פרשן מקרא, מתמטיקאי, אסטרונום ופיזיקאי, והשיג ידע רב בכל תחומי העשייה המגוונים שלו. רלב"ג כתב את כל כתביו בעברית (שלא כמו רוב חכמי ימי הביניים היהודים), ורובם של אלה תורגמו ללטינית בשל חשיבותם הרבה. רלב"ג המציא כמה מכשירי מדידה, וביניהם את המכשיר המכונה bacuhis Jacobi למדידת זוויות נראות, וקופסה שחורה לשיפור תצפיות, מה שאפשר לתקן את המספרים בטבלאות אסטרונומיות.

אינדוקציה – במשמעותה המתמטית במקורות

נוכל למצוא עיקרון הלכתי המזכיר לנו את תהליך האינדוקציה.

הגמרא[54] מביאה את הכלל המיישם את אחת המידות שהתורה נדרשת בהן: '...דבר שהיה בכלל, ויצא מן הכלל ללמד, לא ללמד על עצמו יצא, אלא ללמד על הכלל כולו יצא'. מידה זו מאופיינת בקיומן של שתי הוראות נפרדות:

האחת – כללית, והשנייה – מתייחסת למקרה או לפרט אחד מתוך הכלל. והשאלה הנשאלת היא: לשם מה באה ההוראה הנפרדת לפרט המסוים?

דוגמה: בחומש שמות[55] מגדירה לנו התורה כלל: 'לא תעשו כל מלאכה'. ובשמות ל"ה, ג' מבארת התורה פרט מסוים שיצא מן הכלל: 'לא תבערו אש... ביום השבת'. הבערה הייתה בכלל של 'כל מלאכה', ומדוע היא נזכרת באופן פרטי?

במסכת שבת נאמר:[56] 'מה הבערה שהיא אב מלאכה וחייבים עליה בפני עצמה – אף כל שהיא אב מלאכה חייבים עליה בפני עצמה'. כלומר, התורה ציינה בנפרד את מלאכת 'הבערה', כדי ללמדנו שכפי שהבערה היא מלאכה בפני עצמה והעובר עליה חייב קורבן, כך על כל מלאכה ומלאכה, האדם מתחייב בקורבן נפרד.

רש"י מביא כלל זה בפירושו לעניין חיוב אכילת מצה בפסח:

> בחומש שמות נאמר: 'שבעת ימים מצות תאכלו...',[57] ואילו בחומש דברים נאמר: 'ששת ימים תאכל מצות'.[58] שני פסוקים אלו נראים כסותרים זה את זה.
>
> רש"י:[59] '...לימד על אכילת מצה בשביעי שאינה חובה. ומכאן אתה למד לששת ימים, שהרי (היום ה־) שביעי בכלל היה ויצא מן הכלל ללמד שאין אכילת מצה בו חובה אלא רשות, ולא ללמד על עצמו יצא, אלא ללמד על הכלל כולו יצא. מה שביעי רשות, אף כולם רשות. (חוץ מהלילה הראשון שהכתוב קבעו חובה, שנאמר: 'בערב תאכלו מצות' (שמ' יב 18). אם כך, מתוך שהיום השביעי כפרט יצא מהכלל שבו הוא היה נתון קודם, שלפיו הבנו תחילה שיש חובה לאכול מצה כל שבעת הימים, לומדים אנו על כל הכלל, על כל ימי הפסח.

---

[54] בבלי, פסחים קכ ע"א.
[55] שמ' כ 10.
[56] בבלי, שבת ס ע"א.
[57] שמ' יב 5.
[58] דב' טז 8.
[59] רש"י בפירושו השני לדב' טז 8.

עיקרון לימודי נוסף המזכיר לנו תהליך אינדוקטיבי הוא 'בניין אב'. ניתן למצוא בתורה עניינים שיש ביניהם דמיון בתכונות או בדינים, ופרט אחד מהם המפורט במקום אחד בלבד, מלמד על כל העניינים הדומים לו, וכך יש להשוות את הדין של כל העניינים האחרים לדין הפרט.

דוגמה: בחומש דברים[60] נאמר: ' לא יקום עד אחד באיש'. על פסוק זה מעירה הגמרא, במסכת סוטה דף ל"א ע"ב: 'ממשמע שנאמר 'עד' איני יודע שהוא אחד? ומה תלמוד לומר 'אחד"? (כלומר, כיוון שכתוב 'עד' ביחיד, מובן לנו שמדובר בעד אחד. אם כך, מה מלמדת אותנו התוספת של המילה 'אחד"?). זה בניין אב: כל מקום שנאמר 'עד' – הרי כאן שניים, עד שיפרוט לך הכתוב 'אחד'. (המילה 'אחד' באה ללמדנו, שבכל מקום שכתוב 'עד' ביחיד, הכוונה היא לשניים. כלומר, שמשמעות המילה 'עד' בלשון התורה מקבילה למילה 'עדות' בלשוננו. ורק במקרים שבהם מצוינת התוספת 'אחד', מדובר בעד בודד). אם כך, הרעיון של בניין אב הוא שממקור אחד (כפרט) המלמד אותנו כלל מסוים, אנו למדים על כלל המקורות המקיימים את אותו תנאי. למעשה, ניתן למצוא דוגמאות לבניין אב הנלמד משני כתובים (ואפילו משלושה). במצב זה, אנו לומדים את התכונות המשותפות לשני דינים, ומתכונות אלו אנו לומדים דין כללי, שיחול על כל בעלי התכונות הזהות לתכונות שמצאנו בשני המלמדים. להלן דוגמה בטבלה מס' 3:

טבלה מס' 3. השוואת מתכונות בין שני דינים ללימוד דין כללי

הדלקת הנרות במנורה	*שילוח טמאים*
וי' כד 1–4: צו את בני ישראל... להעלות נר תמיד... יערוך אותו אהרון	במ' ה 1–4: צו את בני ישראל וישלחו מן המחנה
במ' ח 3: ויעש כן אהרון אל מול פני המנורה העלה נרותיה, כאשר ציווה ה'	ויעשו כן בני ישראל וישלחו אותם אל מחוץ למחנה
וי' כד: חוקת עולם לדורותיכם	במ' יט 10: והיתה לבני ישראל...לחוקת עולם

בשני המקרים נאמר 'צו את בני ישראל', והם נוהגים מיד ולדורות, וכך גם כל הצוואות – נוהגות גם מייד וגם לדורות. 'ויעש כן' – מייד, 'חוקת עולם' – לדורות.

שני העקרונות שהובאו עד כה עונים על ההגדרה של לימוד מהפרט אל הכלל. זוהי אינדוקציה לוגית, שכן חסר בהם התהליך האינדוקטיבי המתמטי, שלפיו כל נכונות של שלב אחד גוררת את נכונותו של השלב הבא. דהיינו, 'שרשרת' של טענות נכונות גורמת לנכונותה של הטענה הבאה בתור. דוגמאות[61] לתהליכים אינדוקטיביים, שבהם קיומו של שלב אחד גורר את קיומו של השלב הבא:

שרשרת הדורות: בספר יואל[62] נאמר: 'שמעו זאת הזקנים והאזינו כל יושבי הארץ ההיתה זו בימיכם ואם בימי אבותיכם? עליה לבניכם ספרו, ובניכם לבניהם ובניהם לדור אחר'. יואל הנביא מנבא על תופעה חד־פעמית של ארבה כבד, שכמוהו לא היה וגם לא יהיה לעולם. בדבריו הוא אומר, שאילו הייתה תופעה חריגה שכזו בעבר, הם בוודאי היו שומעים על כך מאבותיהם. וכיצד הייתה עוברת הידיעה? מתואר לנו כאן

[60] דב' יט 15.
[61] ג' ארליך, 'האינדוקציה המתמטית במשנה ובתלמוד', הגיון, א (תשמ"ט), עמ' 44–68.
[62] יואל א 2–3.

תהליך של העברה מאחד לשני, כאשר הביטוי: 'ובניהם לדור אחר' מתאר את המעבר הכללי מהדור ה־n לדור ה ־n+1.

סדרת הנזירים: המשנה[63] אומרת: 'מי שאמר 'הריני נזיר' ושמע חברו ואמר 'ואני', 'ואני' – הרי כולם נזירים. הותר הראשון – הותרו כולם. הותר אחרון – האחרון מותר וכולם אסורין'. אדם יכול להפריש את עצמו לנזירות לתקופה מוגבלת, ואז חלות עליו שלוש מגבלות: 1. איסור שתיית יין; 2. איסור תספורת; 3. איסור היטמאות למת. (ישנן הלכות רבות נוספות הנוגעות לנזירות עצמה, לעצם קבלת הנזירות – מתי האמירה מחייבת, וכן לעניין התרת הנזירות וכד'.)

הגמרא[64] דנה במצב שבו אדם מקבל על עצמו נזירות ואנשים נוספים סביבו מצטרפים לאמירתו ומתכוונים בכך לקבל על עצמם נזירות. במהלך הדברים, דנה הגמרא כיצד לפרש את כוונת שורת האנשים המביעים בזה אחר זה נכונות לקבל על עצמם נזירות. האם אמירת 'ואני' מבטאת כוונה לקבל נזירות כמו הראשון, או כמו זה שאמר 'ואני' לפניו? לעניין האינדוקציה, נראה כי בהמשך הגמרא מובאת ברייתא: 'תא שמע דתניא בהדיא (בא ושמע שכתוב בפרוש): הותר הראשון – הותרו כולם, הותר האחרון – האחרון מותר וכולם אסורין. הותר אמצעי, הימנו ולמטה – מותר, הימנו ולמעלה – אסור. שמע מינה, חד בחבריה מתפיס. שמע מינה!'. כלומר, משתמע מהדברים שכל נזיר בסדרה קיבל על עצמו נזירות בגלל הקודם לו, ולכן אם הותר האדם ה־n, מסתבר שהאדם ה־n+1 גם הוא איננו נזיר, שהרי הוא (האדם ה־n+1) קיבל על עצמו נזירות כמו הקודם לו (האדם ה־n), ובאינדוקציה, כל אלו שלמטה ממנו (כלומר, כל אלו שקיבלו נזירות אחריו) – מותרים, דהיינו, הם אינם נזירים.

שתיית יין ללא סוף: בחומש דברים נאמר: 'ואכלת ושבעת וברכת...'[65] – ומכאן החיוב בברכת המזון. לדעת רבן גמליאל, יש לברך ברכת המזון לא רק לאחר אכילת לחם וכד', אלא לאחר אכילת כל אחד משבעת המינים שנשתבחה בהם ארצנו. שלושה אנשים או יותר שאכלו ביחד, צריכים לזמן. יש דעה שברכת הזימון 'טעונה כוס', דהיינו, שיש לשתות לאחר ברכת המזון את היין שליווה את ברכת המזון.

הגמרא[66] מתייחסת למצב זה ואומרת: 'וא"ת, לרבן גמליאל דאמר ג' ברכות שלמות וסבירי ליה מזמנים על שבעת המינים, או סבירי ליה דברכה טעונה כוס, אם כך – יזמנו, ואם כך – יזמנו לעולם'. כלומר, לפי רבן גמליאל, שסבור שגם על שבעת המינים יש צורך בברכת המזון, יוצא שכאשר אוכלים ומזמנים עם כוס, יש צורך אחר כך לשוב ולזמן על היין. ושוב יש לעשות זאת עם כוס נוספת – שנייה. בצורה זו, הכוס השנייה מחייבת זימון עם כוס שלישית, והכוס השלישית מחייבת זימון עם כוס רביעית, וכך ישובו ויזמנו לעולם. רבים מתמודדים עם שאלת 'אין סוף הכוסות', אך מעניין לראות את הניסוח בגנזי ראשונים לר' אברהם אלאשבילי (אבי הריטב"א, ויש הסוברים כי הדברים הם של הריטב"א עצמו): 'ומזמנים עליו וחוזרים ומברכים על כוס אחר, וכן לעולם, ואם כן אין לדבר סוף'. ניסוח זה מקביל להוכחה אינדוקטיבית מושלמת. יש כאן הבחנה ברורה בין שלב המעבר – שאם שותים כוס n, מתחייבים בשתיית הכוס ה־n+1 – לבין המסקנה הסופית, שהדבר נכון לכל כוס (ואם כך – אין לדבר סוף).

[63] משנה, נזיר ד, א.
[64] בבלי, נזיר כא ע"א.
[65] דב' ח 10.
[66] בבלי, ברכות לז ע"א.

סיכום

במאמר זה הצגנו שישה מושגים מתמטיים הנלמדים בבתי הספר בחטיבות הביניים ובחטיבה העליונה מתוך הקשרם למקורות היהודיים. הצגנו את המושגים: ממוצע חשבוני, יחס ופרופורציה, פלינדרום, חזקות ולוגריתמים, עצרת ואינדוקציה. מורים למתמטיקה והמתעניינים בתחום זה יכולים לשלב את המתואר במאמרנו לגבי כל אחד מהמושגים כרקע וכחיזוק להוראתם בכיתה, וכמובן מורים בתחום היהדות יכולים להיעזר בדיון המתמטי לגבי כל מושג מהמקורות. למעשה, הדרך שבה מוצגים המושגים יכולה להשתלב במערך שיעור המוגש בדרך מפורטת וברורה למורה ולתלמיד. תקוותנו היא שמורים ישתמשו בדברים המופיעים כאן לתועלת ההוראה והלימוד על כל רובדיהם.

Six Mathematical Concepts in Scripture and the Writings of the Sages

Ayala Raviv and Monik Hadad

Abstract

This article describes six mathematical concepts that appear in the Bible and the manuscripts of CHAZA'L. The concepts to be presented are: Accounting average, ratio, Palindrome, robustness and logarithms, factorial, induction. The concepts will be presented in their mathematical description and as they appear in the Bible and the manuscripts of CHAZA'L.

The mathematical concepts selected are included in the formal middle school and high school curriculum. The presenting and teaching of mathematical study material from the sources of Judaism is an example of multidisciplinary learning that is currently welcomed in the educational system. Teaching the Jewish sources of mathematical concepts will enrich the learning of mathematics as teaching of history and the philosophy of science enriches scientific learning. The concepts explained here appear in the manuscripts of Judaism as their exact or as similar mathematical meaning today. Sometimes they are used as philosophical concepts, which can be discussed in the system of human custom and behavior, even outside the mathematical system.

This article calls teachers and educators, both those who teach math and who teach Judaism, to address the theory and practice of teaching mathematics from a Jewish perspective: To demonstrate the sympathetic attitude of Judaism to mathematics on the one hand, and the exceptional mathematical and scientific knowledge of Jewish scholars, on the other.

Keywords: Mathematical concepts, arithmetic mean, ratio, palindrome, robustness and logarithms, factorial, induction